Exámenes de Selectividad

Matemáticas II. Madrid 2023, Extraordinaria

mentoor.es

Ejercicio 1. Opción A. Álgebra

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ **se pide:**

a) **Calcular el determinante de A^tA.**
b) **Calcular el rango de BA en función de b.**
c) **Calcular B^{-1} para $b = 2$.**
d) **Para $b = 1$, calcular B^5.**

Solución:

a) **Calcular el determinante de A^tA.**

Calculamos la traspuesta de A:

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos el producto A^tA:

$$A^tA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+1 & 2+0 & 0-2 \\ 2+0 & 1+0 & 0+0 \\ 0-2 & 0+0 & 0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante:

$$\begin{aligned} \det(A^tA) &= \begin{vmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 5(1 \cdot 4 - 0 \cdot 0) - 2(2 \cdot 4 - 0 \cdot (-2)) + (-2)(2 \cdot 0 - 1 \cdot (-2)) \\ &= 5(4) - 2(8) - 2(2) \\ &= 20 - 16 - 4 = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\det(A^tA) = 0}$$

b) **Calcular el rango de BA en función de b.**

B es 2×2, A es 2×3. El producto BA será 2×3.

$$BA = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b(2) + 0(-1) & b(1) + 0(0) & b(0) + 0(2) \\ 1(2) + b(-1) & 1(1) + b(0) & 1(0) + b(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b & b & 0 \\ 2-b & 1 & 2b \end{pmatrix}$$

El rango de una matriz 2×3 puede ser como máximo 2. Para determinar el rango, buscamos un menor de orden 2 no nulo. Consideramos el menor formado por las columnas 2 y 3:

$$M_{12,23} = \begin{vmatrix} b & 0 \\ 1 & 2b \end{vmatrix} = b(2b) - 0(1) = 2b^2$$

Si $2b^2 \neq 0$, es decir, si $b \neq 0$, entonces existe un menor de orden 2 no nulo, y $\text{Rg}(BA) = 2$. Si $b = 0$, la matriz es:

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz tiene una fila no nula, por lo que su rango es 1.

$$\boxed{\textbf{Si } \boldsymbol{b \neq 0 \Rightarrow \mathrm{Rg}(BA) = 2}. \quad \textbf{Si } \boldsymbol{b = 0 \Rightarrow \mathrm{Rg}(BA) = 1}.}$$

c) Calcular B^{-1} para $b = 2$.

Para $b = 2$, la matriz es $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculamos su determinante: $|B| = 2(2) - 0(1) = 4$. Como $|B| \neq 0$, existe la inversa. Calculamos la adjunta: $Adj(B) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculamos la traspuesta de la adjunta: $(Adj(B))^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. La inversa es $B^{-1} = \frac{1}{|B|}(Adj(B))^t$.

$$B^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/4 & 0/4 \\ -1/4 & 2/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\boldsymbol{B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}}}$$

d) Para $b = 1$, calcular B^5.

Para $b = 1$, la matriz es $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculamos las primeras potencias:

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 0+0 \\ 1+1 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 0+0 \\ 2+1 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Parece seguir el patrón $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$.
Aunque es opcional, podemos intentar demostrarlo por inducción:
Base: $n = 1$, $B^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Cierto.
Hipótesis: Suponemos $B^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$.
Paso: $B^{k+1} = B^k \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 0+0 \\ k+1 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k+1 & 1 \end{pmatrix}$. Cierto.
Por lo tanto, para $n = 5$:

$$B^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\boldsymbol{B^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}}}$$

Ejercicio 2. Opción A. Análisis

Un equipo de ingenieros realiza pruebas de consumo de un nuevo vehículo híbrido. El gasto en litros de combustible por cada 100 kilómetros en función de la velocidad, medida en decenas de kilómetros por hora, es

$$\boldsymbol{c(v) = \begin{cases} \frac{5v}{3} & \text{si } 0 \leq v < 3 \\ 14 - 4v + \frac{v^2}{3} & \text{si } v \geq 3. \end{cases}}$$

a) Si en una primera prueba el vehículo tiene que circular a más de 3 decenas de kilómetros por hora, ¿a qué velocidad debe ir el vehículo para obtener un consumo mínimo?

b) Si en otra prueba el vehículo debe circular a una velocidad v tal que $1 \leq v \leq 8$, ¿cuáles serán el máximo y el mínimo consumo posibles del vehículo?

Solución:

a) **¿A qué velocidad ($v > 3$) debe ir el vehículo para obtener un consumo mínimo?**

Para $v > 3$, la función consumo es $c(v) = 14 - 4v + \frac{v^2}{3}$. Buscamos el mínimo de esta función en el intervalo $(3, \infty)$. Calculamos la derivada:

$$c'(v) = -4 + \frac{2v}{3}$$

Igualamos la derivada a cero para encontrar puntos críticos:

$$-4 + \frac{2v}{3} = 0 \implies \frac{2v}{3} = 4 \implies 2v = 12 \implies v = 6.$$

El valor $v = 6$ está en el intervalo $(3, \infty)$. Comprobamos si es un mínimo usando la segunda derivada:

$$c''(v) = \frac{2}{3}$$

Como $c''(6) = 2/3 > 0$, la función tiene un mínimo relativo en $v = 6$. Como es el único punto crítico en $(3, \infty)$ y es un mínimo, es el mínimo absoluto en ese intervalo.

$$\boxed{\textbf{La velocidad para un consumo mínimo (con } v > 3\textbf{) es de 6 decenas de km/h (60 km/h).}}$$

b) **¿Cuáles serán el máximo y el mínimo consumo posibles del vehículo para $1 \leq v \leq 8$?**
Necesitamos encontrar los extremos absolutos de $c(v)$ en el intervalo cerrado $[1, 8]$. Primero, verificamos la continuidad en el intervalo. La función es continua en $[0, 3)$ y en $[3, \infty)$ por ser lineal y polinómica respectivamente. Estudiamos la continuidad en $v = 3$.

$$c(3) = 14 - 4(3) + \frac{3^2}{3} = 14 - 12 + \frac{9}{3} = 2 + 3 = 5.$$

$$\lim_{v \to 3^-} c(v) = \lim_{v \to 3^-} \frac{5v}{3} = \frac{5(3)}{3} = 5.$$

$$\lim_{v \to 3^+} c(v) = \lim_{v \to 3^+} \left(14 - 4v + \frac{v^2}{3}\right) = 14 - 12 + 3 = 5.$$

Como los límites laterales coinciden con $c(3)$, la función es continua en $v = 3$ y, por tanto, en todo el intervalo $[1, 8]$. Por el Teorema de Weierstrass, existen máximo y mínimo absolutos en $[1, 8]$. Estos pueden ocurrir en los extremos del intervalo ($v = 1, v = 8$) o en los puntos críticos dentro del intervalo $(1, 8)$. Los puntos críticos son aquellos donde la derivada es cero o no existe.

Derivada en $(0, 3)$: $c'(v) = 5/3$. No se anula nunca.
Derivada en $(3, \infty)$: $c'(v) = -4 + 2v/3$. Se anula en $v = 6$. Este punto está en el intervalo $(1, 8)$.
Derivabilidad en $v = 3$:

$$c'(3^-) = \lim_{v \to 3^-} 5/3 = 5/3$$

$$c'(3^+) = \lim_{v \to 3^+} (-4 + 2v/3) = -4 + 2(3)/3 = -4 + 2 = -2$$

Como las derivadas laterales son distintas, $c(v)$ no es derivable en $v = 3$. Este es un punto crítico. Los candidatos a extremos absolutos son $v = 1$, $v = 8$ (extremos del intervalo), $v = 3$ (punto de no derivabilidad) y $v = 6$ (punto donde $c'(v) = 0$). Evaluamos la función en estos puntos:
$c(1) = \frac{5(1)}{3} = \frac{5}{3} \approx 1.67$.
$c(3) = 5$.
$c(6) = 14 - 4(6) + \frac{6^2}{3} = 14 - 24 + \frac{36}{3} = -10 + 12 = 2$.
$c(8) = 14 - 4(8) + \frac{8^2}{3} = 14 - 32 + \frac{64}{3} = -18 + \frac{64}{3} = \frac{-54+64}{3} = \frac{10}{3} \approx 3.33$.
Comparando los valores 5/3, 5, 2, 10/3: El valor mínimo es 5/3 (se alcanza en $v = 1$). El valor máximo es 5 (se alcanza en $v = 3$).

Consumo mínimo posible: 5/3 litros/100km (a 10 km/h).
Consumo máximo posible: 5 litros/100km (a 30 km/h).

Ejercicio 3. Opción A. Geometría

Sean el plano $\pi : z = 1$, los puntos $P(1,1,1)$ y $Q(0,0,1)$ y la recta r que pasa por los puntos P y Q.

a) **Verifique que los puntos P y Q pertenecen al plano π.**
b) **Halle una recta paralela a r contenida en el plano $z = 0$.**
c) **Halle una recta que pase por P y tal que su proyección ortogonal sobre el plano π sea la recta r, con la cual forme un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radianes.**

Solución:

a) **Verifique que los puntos P y Q pertenecen al plano π.**

El plano es $\pi : z = 1$. Para el punto $P(1,1,1)$, su coordenada z es 1. Por tanto, $P \in \pi$. Para el punto $Q(0,0,1)$, su coordenada z es 1. Por tanto, $Q \in \pi$.

$$\boxed{\textbf{Ambos puntos cumplen la ecuación } z = 1\textbf{, por lo que pertenecen al plano } \pi.}$$

b) **Halle una recta paralela a r contenida en el plano $z = 0$.**

Recta r:

Pasa por $P(1,1,1)$ y $Q(0,0,1)$. Vector director $\vec{d_r} = \vec{QP} = P - Q = (1-0, 1-0, 1-1) = (1,1,0)$.

Recta buscada r':
Debe ser paralela a r, por lo que su vector director $\vec{d_{r'}}$ puede ser el mismo, $\vec{d_{r'}} = (1,1,0)$.

Debe estar contenida en el plano $z = 0$. Esto significa que todos sus puntos deben tener coordenada $z = 0$.

Necesitamos un punto que pertenezca a $z = 0$. Podemos elegir el origen $O(0,0,0)$.

La recta r' pasa por $O(0,0,0)$ y tiene vector director $(1,1,0)$.

Ecuación paramétrica de r':

$$r' \equiv \begin{cases} x = 0 + 1\lambda = \lambda \\ y = 0 + 1\lambda = \lambda \\ z = 0 + 0\lambda = 0 \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\boxed{\textbf{Una recta paralela a r en } z = 0 \textbf{ es } r' : (x,y,z) = (\lambda, \lambda, 0).}$$

c) **Halle una recta que pase por P y tal que su proyección ortogonal sobre el plano π sea la recta r, con la cual forme un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radianes.**

Sea s la recta buscada. s pasa por $P(1,1,1)$.

La proyección ortogonal de s sobre $\pi : z = 1$ es la recta r.

Vector director de r es $\vec{d_r} = (1,1,0)$.

Sea $\vec{d_s} = (a,b,c)$ el vector director de s.

Como s pasa por $P \in \pi$, la proyección de s sobre π es la intersección del plano π con el plano π' que contiene a s y es perpendicular a π. El vector normal a π es $\vec{n} = (0,0,1)$.

La proyección de $\vec{d_s}$ sobre el plano π es $\vec{d_s} - \text{proj}_{\vec{n}}(\vec{d_s})$.

$$\text{proj}_{\vec{n}}(\vec{d_s}) = \frac{\vec{d_s} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n} = \frac{(a,b,c)\cdot(0,0,1)}{1^2}(0,0,1) = c(0,0,1) = (0,0,c).$$

El vector proyectado es $(a,b,c) - (0,0,c) = (a,b,0)$.

Este vector proyectado debe ser paralelo a $\vec{d_r} = (1,1,0)$.

Entonces, $(a,b,0) = k(1,1,0)$ para algún k. Esto implica $a = k, b = k$.

Podemos tomar $k = 1$, así que $\vec{d_s} = (1,1,c)$.

Como la proyección es r, s no está contenida en π, por lo que $c \neq 0$.
El ángulo θ entre s (con $\vec{d_s} = (1,1,c)$) y r (con $\vec{d_r} = (1,1,0)$) es $\pi/4$.

Usamos la fórmula del coseno del ángulo entre dos vectores:

$$\cos\theta = \frac{|\vec{d_s}\cdot\vec{d_r}|}{|\vec{d_s}||\vec{d_r}|}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{|(1,1,c)\cdot(1,1,0)|}{\sqrt{1^2+1^2+c^2}\sqrt{1^2+1^2+0^2}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|1(1)+1(1)+c(0)|}{\sqrt{2+c^2}\sqrt{2}} = \frac{|2|}{\sqrt{2(2+c^2)}} = \frac{2}{\sqrt{4+2c^2}}$$

Elevamos al cuadrado ambos lados:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{4+2c^2}}\right)^2$$

$$\frac{2}{4} = \frac{4}{4+2c^2} \implies \frac{1}{2} = \frac{4}{4+2c^2}$$

$$1(4+2c^2) = 2(4) \implies 4+2c^2 = 8 \implies 2c^2 = 4 \implies c^2 = 2 \implies c = \pm\sqrt{2}.$$

Hay dos posibles vectores directores para s: $\vec{d_{s1}} = (1,1,\sqrt{2})$ y $\vec{d_{s2}} = (1,1,-\sqrt{2})$. Como la recta s pasa por $P(1,1,1)$, las ecuaciones son:

$$s_1 \equiv (x,y,z) = (1,1,1) + \lambda(1,1,\sqrt{2})$$

$$s_2 \equiv (x,y,z) = (1,1,1) + \lambda(1,1,-\sqrt{2})$$

Las posibles rectas son:
$\boldsymbol{s_1 : (x,y,z) = (1+\lambda, 1+\lambda, 1+\sqrt{2}\lambda)}$
$\boldsymbol{s_2 : (x,y,z) = (1+\lambda, 1+\lambda, 1-\sqrt{2}\lambda)}$

Ejercicio 4. Opción A. Probabilidad

Sabiendo que $P(A) = 0.5$, $P(A|B) = 0.625$ y $P(A \cup B) = 0.65$, se pide calcular:

a) $P(B)$ y $P(A \cap B)$.
b) $P(A|A \cup B)$ y $P(A \cap B|A \cup B)$.

Solución:

a) $P(B)$ y $P(A \cap B)$.

Usamos la definición de probabilidad condicionada:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$0.625 = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \implies P(A \cap B) = 0.625 \cdot P(B)$$

Usamos la fórmula de la probabilidad de la unión:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Sustituimos los valores conocidos y la expresión para $P(A \cap B)$:

$$0.65 = 0.5 + P(B) - (0.625 \cdot P(B))$$
$$0.65 - 0.5 = P(B)(1 - 0.625)$$
$$0.15 = P(B)(0.375)$$
$$P(B) = \frac{0.15}{0.375} = \frac{150}{375} = \frac{30}{75} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} = 0.4$$

Ahora calculamos $P(A \cap B)$:

$$P(A \cap B) = 0.625 \cdot P(B) = 0.625 \cdot 0.4 = 0.25$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(B) = 0.4 \quad \text{y} \quad P(A \cap B) = 0.25}}$$

b) $P(A|A \cup B)$ y $P(A \cap B|A \cup B)$.

Calculamos $P(A|A \cup B)$:

$$P(A|A \cup B) = \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)}$$

Dado que $A \subseteq (A \cup B)$, la intersección $A \cap (A \cup B)$ es simplemente A.

$$P(A|A \cup B) = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{0.5}{0.65} = \frac{50}{65} = \frac{10}{13}$$

Calculamos $P(A \cap B|A \cup B)$:

$$P(A \cap B|A \cup B) = \frac{P((A \cap B) \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)}$$

Dado que $(A \cap B) \subseteq (A \cup B)$, la intersección $(A \cap B) \cap (A \cup B)$ es $A \cap B$.

$$P(A \cap B|A \cup B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} = \frac{0.25}{0.65} = \frac{25}{65} = \frac{5}{13}$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(A|A \cup B) = \frac{10}{13} \quad \text{y} \quad P(A \cap B|A \cup B) = \frac{5}{13}}}$$

Ejercicio 1. Opción B. Álgebra

Dado el sistema

$$\begin{cases} -2x + y + kz &= 1 \\ kx - y - z &= 0 \\ -y + (k-1)z &= 3 \end{cases}$$

se pide:

a) **Discutirlo en función del parámetro k.**
b) **Resolverlo para $k = 3$.**
c) **Resolverlo para $k = 3/2$ y especificar, si es posible, una solución particular con $x = 2$.**

Solución:

a) **Discutirlo en función del parámetro k.**

Matrices del sistema:

$$\text{Matriz de coeficientes } A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & k \\ k & -1 & -1 \\ 0 & -1 & k-1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Matriz ampliada } A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & k & 1 \\ k & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & k-1 & 3 \end{array}\right)$$

Determinante de A:

$$\begin{aligned} |A| &= -2\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & k-1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} k & -1 \\ 0 & k-1 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} k & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -2(-(k-1) - (-1)(-1)) - 1(k(k-1) - 0) + k(-k-0) \\ &= -2(-k+1-1) - (k^2-k) - k^2 \\ &= -2(-k) - k^2 + k - k^2 \\ &= 2k - 2k^2 + k = 3k - 2k^2 \\ &= k(3-2k) \end{aligned}$$

El determinante se anula si $k = 0$ o $3 - 2k = 0 \implies k = 3/2$.

Discusión por casos (Teorema de Rouché-Frobenius):

Caso 1: Si $k \neq 0$ y $k \neq 3/2$. En este caso, $|A| \neq 0$, por lo tanto $\text{Rg}(A) = 3$. Como la matriz ampliada A^* es 3×4, su rango es como máximo 3. Dado que $\text{Rg}(A) = 3$, necesariamente $\text{Rg}(A^*) = 3$. Como $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A^*) = 3$ (número de incógnitas), el sistema es **Compatible Determinado (S.C.D.)**.

Caso 2: Si $k = 0$. $|A| = 0$. La matriz A es $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. El menor $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Por lo tanto, $\text{Rg}(A) = 2$. La matriz ampliada A^* es $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right)$. Consideramos el menor formado por las columnas 1, 2 y 4:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -2(-3-0) = 6 \neq 0.$$

Existe un menor de orden 3 no nulo en A^*, por lo que $\text{Rg}(A^*) = 3$. Como $\text{Rg}(A) = 2 \neq \text{Rg}(A^*) = 3$, el sistema es **Incompatible (S.I.)**.

Caso 3: Si $k = 3/2$. $|A| = 0$. La matriz A es $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3/2 \\ 3/2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}$. El menor $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 3/2 = 1/2 \neq 0$. Por lo tanto, $\mathrm{Rg}(A) = 2$. La matriz ampliada A^* es $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 3/2 & 1 \\ 3/2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1/2 & 3 \end{array}\right)$. Comprobamos el rango de A^* orlando el menor 2×2 no nulo con la cuarta columna y la tercera fila.

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3/2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3/2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -2(-3) - 1(9/2) + 1(-3/2) = 6 - \frac{9}{2} - \frac{3}{2} = 6 - \frac{12}{2} = 6 - 6 = 0.$$

Como el único menor de orden 3 relevante es cero, $\mathrm{Rg}(A^*) = 2$. Como $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A^*) = 2 < 3$ (número de incógnitas), el sistema es **Compatible Indeterminado (S.C.I.)** con un grado de libertad.

$$\boxed{\begin{array}{l} \textbf{Si } \boldsymbol{k \neq 0, k \neq 3/2 \Rightarrow} \textbf{ S.C.D.} \\ \textbf{Si } \boldsymbol{k = 0 \Rightarrow} \textbf{ S.I.} \\ \textbf{Si } \boldsymbol{k = 3/2 \Rightarrow} \textbf{ S.C.I.} \end{array}}$$

b) Resolverlo para $k = 3$. Para $k = 3$, estamos en el Caso 1 (S.C.D.). Usamos la Regla de Cramer.

$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. $|A| = 3(3) - 2(3^2) = 9 - 18 = -9$.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1(-2-1) - 1(0-(-3)) + 3(0-(-3))}{-9} = \frac{-3-3+9}{-9} = \frac{3}{-9} = -\frac{1}{3}.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-2(0-(-3)) - 1(6-0) + 3(9-0)}{-9} = \frac{-6-6+27}{-9} = \frac{15}{-9} = -\frac{5}{3}.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-2(-3-0) - 1(9-0) + 1(-3-0)}{-9} = \frac{6-9-3}{-9} = \frac{-6}{-9} = \frac{2}{3}.$$

$$\boxed{\boldsymbol{x = -1/3, \quad y = -5/3, \quad z = 2/3}}$$

c) Resolverlo para $k = 3/2$ y especificar, si es posible, una solución particular con $x = 2$. Para $k = 3/2$, estamos en el Caso 3 (S.C.I.). $\mathrm{Rg}(A) = 2$. El sistema es equivalente a tomar dos ecuaciones linealmente independientes. Usamos las dos primeras:

$$\begin{cases} -2x + y + \frac{3}{2}z = 1 \\ \frac{3}{2}x - y - z = 0 \end{cases}$$

Pasamos z al otro lado como parámetro: $z = \lambda$.

$$\begin{cases} -2x + y = 1 - \frac{3}{2}\lambda \\ \frac{3}{2}x - y = \lambda \end{cases}$$

Sumamos las dos ecuaciones:

$$(-2 + 3/2)x = 1 - \frac{3}{2}\lambda + \lambda$$

$$-\frac{1}{2}x = 1 - \frac{1}{2}\lambda$$

$$x = -2(1 - \frac{1}{2}\lambda) = -2 + \lambda$$

Sustituimos x en la segunda ecuación para hallar y:

$$y = \frac{3}{2}x - \lambda = \frac{3}{2}(-2 + \lambda) - \lambda = -3 + \frac{3}{2}\lambda - \lambda = -3 + \frac{1}{2}\lambda$$

La solución general es $(x, y, z) = (-2 + \lambda, -3 + \frac{1}{2}\lambda, \lambda)$ para $\lambda \in \mathbb{R}$.
Buscamos la solución particular con $x = 2$.

$$x = -2 + \lambda = 2 \implies \lambda = 4.$$

Sustituimos $\lambda = 4$ en la solución general:

$$y = -3 + \frac{1}{2}(4) = -3 + 2 = -1$$

$$z = 4$$

La solución particular es $(2, -1, 4)$.

Solución general (k=3/2): $(x, y, z) = (-2 + \lambda, -3 + \lambda/2, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}$
Solución particular (x=2): $(2, -1, 4)$

Ejercicio 2. Opción B. Análisis

Dadas las funciones $f(x) = 2 + 2x - 2x^2$, $g(x) = 2 - 6x + 4x^2 + 2x^3$ se pide:

a) **Estudiar la derivabilidad de $h(x) = |f(x)|$.**
b) **Hallar el área de la región acotada por las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = 0$ y $x = 2$.**

Solución:

a) **Estudiar la derivabilidad de $h(x) = |f(x)|$.**

$f(x) = -2x^2 + 2x + 2$. $h(x) = |-2x^2 + 2x + 2|$. La función $f(x)$ es una parábola (continua y derivable en $\mathbb{R}$). La función $h(x) = |f(x)|$ es continua en $\mathbb{R}$. La derivabilidad puede fallar en los puntos donde $f(x) = 0$. Buscamos las raíces de $f(x)$:

$$-2x^2 + 2x + 2 = 0 \implies x^2 - x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Llamemos $a = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ y $b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. La derivada de $f(x)$ es $f'(x) = -4x + 2$. Evaluamos $f'(x)$ en las raíces:

$$f'(a) = -4\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + 2 = -2(1-\sqrt{5}) + 2 = -2 + 2\sqrt{5} + 2 = 2\sqrt{5} \neq 0.$$

$$f'(b) = -4\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + 2 = -2(1+\sqrt{5}) + 2 = -2 - 2\sqrt{5} + 2 = -2\sqrt{5} \neq 0.$$

Como la derivada no es cero en las raíces, la función $h(x) = |f(x)|$ presentará puntos angulosos en $x = a$ y $x = b$, y por lo tanto no será derivable en esos puntos. $h(x)$ es derivable para $x \neq \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

$$\boxed{\boldsymbol{h(x)} \textbf{ es derivable en } \mathbb{R} - \left\{\frac{\mathbf{1}-\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{1}+\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{2}}\right\}.}$$

b) **Hallar el área de la región acotada por las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = 0$ y $x = 2$.**

El área A viene dada por la integral definida de la diferencia absoluta entre las funciones:

$$A = \int_0^2 |f(x) - g(x)| dx$$

Calculamos la función diferencia:

$$\begin{aligned} d(x) = f(x) - g(x) &= (2 + 2x - 2x^2) - (2 - 6x + 4x^2 + 2x^3) \\ &= 2 + 2x - 2x^2 - 2 + 6x - 4x^2 - 2x^3 \\ &= -2x^3 - 6x^2 + 8x \end{aligned}$$

Buscamos las raíces de $d(x)$ para determinar los intervalos donde $f(x) - g(x)$ cambia de signo.

$$-2x^3 - 6x^2 + 8x = 0 \implies -2x(x^2 + 3x - 4) = 0$$

$$-2x(x+4)(x-1) = 0$$

Las raíces son $x = 0$, $x = 1$, $x = -4$.

En el intervalo de integración $[0, 2]$, las raíces son $x = 0$ y $x = 1$. Debemos dividir la integral en $[0, 1]$ y $[1, 2]$. Estudiamos el signo de $d(x) = -2x(x+4)(x-1)$ en los intervalos:

- Intervalo $(0,1)$: Tomamos $x = 0.5$. $d(0.5) = -2(0.5)(0.5+4)(0.5-1) = (-1)(+)(-) = +$. Entonces $f(x) > g(x)$ en $(0,1)$.
- Intervalo $(1,2)$: Tomamos $x = 1.5$. $d(1.5) = -2(1.5)(1.5+4)(1.5-1) = (-3)(+)(+) = -$. Entonces $g(x) > f(x)$ en $(1,2)$.

El área es:

$$A = \int_0^1 (f(x) - g(x))dx + \int_1^2 (g(x) - f(x))dx$$

$$A = \int_0^1 (-2x^3 - 6x^2 + 8x)dx + \int_1^2 -(-2x^3 - 6x^2 + 8x)dx$$

$$A = \int_0^1 (-2x^3 - 6x^2 + 8x)dx + \int_1^2 (2x^3 + 6x^2 - 8x)dx$$

Calculamos la primitiva:

$$\int (-2x^3 - 6x^2 + 8x)dx = -2\frac{x^4}{4} - 6\frac{x^3}{3} + 8\frac{x^2}{2} = -\frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 4x^2$$

$$\int (2x^3 + 6x^2 - 8x)dx = 2\frac{x^4}{4} + 6\frac{x^3}{3} - 8\frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}x^4 + 2x^3 - 4x^2$$

Aplicamos la regla de Barrow:

$$\int_0^1 (-2x^3 - 6x^2 + 8x)dx = \left[-\frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 4x^2\right]_0^1 = \left(-\frac{1}{2}(1)^4 - 2(1)^3 + 4(1)^2\right) - (0) = -\frac{1}{2} - 2 + 4 = \frac{3}{2}.$$

$$\int_1^2 (2x^3 + 6x^2 - 8x)dx = \left[\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 - 4x^2\right]_1^2 = \left(\frac{1}{2}(2)^4 + 2(2)^3 - 4(2)^2\right) - \left(\frac{1}{2}(1)^4 + 2(1)^3 - 4(1)^2\right)$$

$$= \left(\frac{16}{2} + 16 - 16\right) - \left(\frac{1}{2} + 2 - 4\right) = 8 - \left(\frac{1}{2} - 2\right) = 8 - \left(-\frac{3}{2}\right) = 8 + \frac{3}{2} = \frac{19}{2}.$$

El área total es:

$$A = \frac{3}{2} + \frac{19}{2} = \frac{22}{2} = 11.$$

$\boxed{\textbf{El área de la región acotada es 11 unidades cuadradas.}}$

Ejercicio 3. Opción B. Geometría

Dados el plano $\pi : x + 3y + 2z + 14 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2 \\ z = 5 \end{cases}$, se pide:

a) **Hallar el punto del plano más próximo al origen de coordenadas.**
b) **Calcular la proyección ortogonal del eje OZ sobre el plano π.**
c) **Hallar la recta con dirección perpendicular a r, que esté contenida en π, y que corte al eje OZ.**

Solución:

a) **Hallar el punto del plano más próximo al origen de coordenadas.**

El punto P del plano π más próximo al origen $O(0,0,0)$ es la proyección ortogonal de O sobre π. Se encuentra en la intersección de π con la recta s que pasa por O y es perpendicular a π. El vector normal a π es $\vec{n_\pi} = (1,3,2)$. Este es el vector director de la recta s. Ecuación de la recta s:

$$s \equiv \begin{cases} x = 0 + 1\lambda = \lambda \\ y = 0 + 3\lambda = 3\lambda \\ z = 0 + 2\lambda = 2\lambda \end{cases}$$

Hallamos la intersección $P = s \cap \pi$ sustituyendo las coordenadas de s en la ecuación de π:

$$(\lambda) + 3(3\lambda) + 2(2\lambda) + 14 = 0$$

$$\lambda + 9\lambda + 4\lambda + 14 = 0$$

$$14\lambda = -14 \implies \lambda = -1.$$

Sustituimos $\lambda = -1$ en las ecuaciones de s para obtener el punto P:

$$P = (-1, 3(-1), 2(-1)) = (-1, -3, -2).$$

$$\boxed{\textbf{El punto del plano más próximo al origen es } \boldsymbol{P(-1,-3,-2)}.}$$

b) **Calcular la proyección ortogonal del eje OZ sobre el plano π.**

La proyección ortogonal p del eje OZ sobre el plano π es la recta intersección de π con el plano π' que contiene al eje OZ y es perpendicular a π. *Plano π':* Contiene al eje OZ (vector director $\vec{d_{OZ}} = (0,0,1)$ y punto $O(0,0,0)$). Es perpendicular a π (vector normal $\vec{n_\pi} = (1,3,2)$). El vector normal a π', $\vec{n_{\pi'}}$, debe ser perpendicular a $\vec{d_{OZ}}$ y a $\vec{n_\pi}$.

$$\vec{n_{\pi'}} = \vec{n_\pi} \times \vec{d_{OZ}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(3-0) - \vec{j}(1-0) + \vec{k}(0-0) = (3,-1,0).$$

La ecuación de π' es de la forma $3x - y + 0z + D = 0$. Como pasa por $O(0,0,0)$, $D = 0$.

$$\pi' \equiv 3x - y = 0.$$

La recta proyección p Es la intersección de π y π'.

$$p \equiv \begin{cases} x + 3y + 2z + 14 = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\textbf{La proyección ortogonal del eje OZ sobre } \boldsymbol{\pi} \textbf{ es la recta } \boldsymbol{p \equiv \begin{cases} x+3y+2z+14=0 \\ 3x-y=0 \end{cases}}.}$$

c) Hallar la recta con dirección perpendicular a r, que esté contenida en $\boldsymbol{\pi}$, y que corte al eje OZ.

Recta buscada t: Sea $\vec{d_t}$ su vector director. Recta $r \equiv \begin{cases} x=2 \\ z=5 \end{cases}$. Su vector director puede obtenerse haciendo $y=\mu$. Entonces $r:(2,\mu,5)$. Un vector director es $\vec{d_r}=(0,1,0)$.

− $t \perp r \implies \vec{d_t} \perp \vec{d_r} \implies \vec{d_t}\cdot(0,1,0)=0$.
− $t \subset \pi \implies \vec{d_t} \perp \vec{n_\pi} \implies \vec{d_t}\cdot(1,3,2)=0$.

El vector $\vec{d_t}$ es perpendicular a $\vec{d_r}$ y $\vec{n_\pi}$. Podemos tomar $\vec{d_t}$ como su producto vectorial:

$$\vec{d_t}=\vec{d_r}\times\vec{n_\pi}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}=\vec{i}(2-0)-\vec{j}(0-0)+\vec{k}(0-1)=(2,0,-1).$$

La recta t debe cortar al eje OZ ($x=0, y=0$). Sea Q el punto de corte. Q tiene la forma $(0,0,z_Q)$. Como $t\subset\pi$, el punto Q debe pertenecer a π. Sustituimos $Q(0,0,z_Q)$ en la ecuación de π:

$$0+3(0)+2(z_Q)+14=0 \implies 2z_Q=-14 \implies z_Q=-7.$$

El punto de corte es $Q(0,0,-7)$. La recta t pasa por $Q(0,0,-7)$ y tiene vector director $\vec{d_t}=(2,0,-1)$.

Ecuación paramétrica de t:

$$t \equiv \begin{cases} x=0+2\lambda=2\lambda \\ y=0+0\lambda=0 \\ z=-7-1\lambda=-7-\lambda \end{cases}, \quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

$$\boxed{\textbf{La recta buscada es } \boldsymbol{t\equiv(x,y,z)=(2\lambda,0,-7-\lambda)}.}$$

Ejercicio 4. Opción B. Probabilidad

El 65% de los universitarios de 18 años que intentan superar el examen práctico de conducir lo consigue a la primera. Se escogen al azar 10 universitarios de 18 años que ya han superado el examen práctico de conducir. Se pide:

a) **Calcular la probabilidad de que exactamente 3 de ellos necesitaran más de un intento para superar el examen práctico de conducir.**
b) **Calcular la probabilidad de que alguno de ellos haya necesitado más de un intento para superar el examen práctico de conducir.**
c) **Aproximando por una distribución normal, determinar la probabilidad de que, dados 60 de estos universitarios, como mínimo la mitad superase el examen práctico de conducir a la primera.**

Solución:

a) **Calcular la probabilidad de que exactamente 3 de ellos necesitaran más de un intento.**

Sea p la probabilidad de superar el examen a la primera: $p = 0.65$. Sea q la probabilidad de necesitar más de un intento: $q = 1 - p = 1 - 0.65 = 0.35$. Se escogen $n = 10$ universitarios. Sea X la variable aleatoria: "número de universitarios (de los 10) que necesitaron más de un intento". X sigue una distribución binomial $B(n = 10, p = q = 0.35)$. Buscamos $P(X = 3)$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$P(X = 3) = \binom{10}{3} (0.35)^3 (0.65)^{10-3} = \binom{10}{3} (0.35)^3 (0.65)^7$$

Calculamos el coeficiente binomial: $\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10\times9\times8}{3\times2\times1} = 120$.

$$P(X = 3) = 120 \cdot (0.35)^3 \cdot (0.65)^7 \approx 120 \cdot (0.042875) \cdot (0.0490315...) \approx 0.2522$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(X = 3) \approx 0.2522}}$$

b) **Calcular la probabilidad de que alguno de ellos haya necesitado más de un intento.**

Buscamos la probabilidad de que $X \geq 1$. Es el suceso contrario a que ninguno necesitara más de un intento ($X = 0$).

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$

$$P(X = 0) = \binom{10}{0} (0.35)^0 (0.65)^{10} = 1 \cdot 1 \cdot (0.65)^{10} \approx 0.01346$$

$$P(X \geq 1) = 1 - 0.01346 \approx 0.9865$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(X \geq 1) \approx 0.9865}}$$

c) Aproximando por normal, probabilidad de que, dados 60, como mínimo la mitad superase a la primera.

Ahora $N = 60$. Sea Y la variable aleatoria: "número de universitarios (de los 60) que superan el examen a la primera". Y sigue una distribución binomial $B(N = 60, p = 0.65)$. Buscamos $P(Y \geq 30)$ (como mínimo la mitad de 60). Aproximamos por una distribución normal $Y' \sim N(\mu, \sigma^2)$. Media: $\mu = Np = 60 \times 0.65 = 39$. Varianza: $\sigma^2 = Npq = 60 \times 0.65 \times (1 - 0.65) = 60 \times 0.65 \times 0.35 = 39 \times 0.35 = 13.65$. Desviación típica: $\sigma = \sqrt{13.65} \approx 3.6946$. Verificamos condiciones para la aproximación: $Np = 39 > 5$ y $Nq = 60 \times 0.35 = 21 > 5$. La aproximación es válida. $Y' \sim N(39, 13.65)$. Aplicamos la corrección por continuidad de Yates:

$$P(Y \geq 30) \approx P(Y' \geq 29.5)$$

Estandarizamos la variable Y' para usar la tabla N(0,1):

$$Z = \frac{Y' - \mu}{\sigma} = \frac{29.5 - 39}{\sqrt{13.65}} = \frac{-9.5}{3.6946} \approx -2.571$$

Buscamos $P(Z \geq -2.57)$.

$$P(Z \geq -2.57) = P(Z \leq 2.57)$$

Usando la tabla de la distribución normal N(0,1): buscamos el valor para $z = 2.57$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	~~0,9938~~	~~0,9940~~	~~0,9941~~	~~0,9943~~	~~0,9945~~	~~0,9946~~	~~0,9948~~	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974

$$P(Z \leq 2.57) = 0.9949$$

$\boxed{\textbf{La probabilidad es aproximadamente 0.9949}}$.